

Министерство на образованието и науката

56. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 14.04.2007 г.

9. клас

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} = x^2 - 10x + 23.$$

Задача 2. Четириъгълник $ABCD$ без успоредни страни е вписан в окръжност с радиус 1. Точки $E \in AB$ и $F \in AD$ са такива, че $CE \parallel AD$ и $CF \parallel AB$. Известно е, че окръжността, описана около $\triangle CDF$, пресича за втори път диагонала AC във вътрешна точка. Да се определи най-голямата възможна стойност на израза $AB \cdot AE + AD \cdot AF$.

Задача 3. Да се намери най-малката възможна стойност на израза

$$M = x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z},$$

където x , y и z са реални положителни числа. Кога се достига тази най-малка стойност?

Време за работа: 4 ч.и 30 мин.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Телефон за връзка: 02-979-28-06 (Петър Бойваленов)

Министерство на образованието и науката

56. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 15.04.2007 г.

9. клас

Задача 4. Да се докаже, че не съществуват стойности на реалния параметър a , за които системата

$$\begin{cases} x^2 = x + ay + 1 \\ y^2 = ax + y + 1 \end{cases}$$

има точно три различни решения.

Задача 5. Да се намерят всички четни естествени числа n и всички реални a , за които остатъкът при делението на полинома $x^n - x^{n-1} + ax^4 + 1$ на полинома $x^2 - a^2$ е равен на $97 - (a + 14)x$.

Задача 6. Даден е правилен 16-ъгълник $A_1A_2 \dots A_{16}$, чиито върхове лежат върху окръжност k с център O . Възможно ли е да бъдат избрани част от върховете на 16-ъгълника така, че при последователно завъртане около O на ъгли $\frac{360^\circ}{16}$, $2 \cdot \frac{360^\circ}{16}$, $\dots$, $16 \cdot \frac{360^\circ}{16}$, отсечките, свързващи избраните върхове, да опишат всички страни и диагонали на 16-ъгълника точно по два пъти?

Време за работа: 4 ч. и 30 мин.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Телефон за връзка: 02-979-28-06 (Петър Бойваленов)